التوابع العقدية

• تعريف التابع العقدي:

إذا كانت D مجموعة نقاط غير خالية من المستوي العقدي xoy، ولتكن z نقطة منتمية إلى D إذا أوجدنا قاعدة ربط مثل f تربط كل عنصر $z \in D$ بعدد عقدي جديد w من المستوي uov عندئذ نقول w تابع عقدي ونرمز لذلك:

$$w = f(z)$$

نسمي D منطقة تعريف التابع $w = f(z)$. أما جميع قيم التابع w المقابلة لجميع عناصر $z \in D$ فتشكل مجموعة ثنائية من الأعداد العقدية ولتكن G تسمى منطقة قيم التابع $w = f(z)$ (المستقر).

يمكن كتابة التابع $f(z)$ بالشكل:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y); \quad (x,y) \in D$$

حيث أن:

$$u(x,y) = Re\big(f(z)\big)$$
$$v(x,y) = Im\big(f(z)\big)$$

هو عبارة عن توابع حقيقية للمتحولات x, y .

مثال(1):

التابعان $w = z^2 + 4z + 2$ ، $w = |z + 3|$

منطقة تعريف كل منهما هو المستوي العقدي.

مثال(2):

التابع $w = \frac{1}{z^2+4}$

منطقة تعريفه هي المستوي العقدي باستثناء النقطتين $z = \pm 2i$

تعريف(2): نقول إن التابع العقدي $w = f(z)$ وحيد القيمة على المجموعة D إذا قابلت كل قيمة لـ z من المجموعة D، قيمة واحدة فقط لـ$w = f(z)$.

أما إذا قابلت قيمة واحدة على الأقل للمتحول z من المجموعة D قيمتين أو أكثر لـ $w = f(z)$ عندئذ نقول عن التابع $f(z)$ أنه متعدد القيم.

مثال(3):

التابع

$$w = f(z) = z^3 + 3z + 1$$

الحل: التابع وحيد القيمة ولتعيين قسميه الحقيقي u(x,y) والتخيلي v(x,y) :

$$w = f(z) = f(x + iy) = (x + iy)^3 + 3(x + iy) + 1$$
$$= (x^3 - 3xy^2 + 3x + 1) + i(3x^2y - y^3 + 3y)$$
$$u(x,y) = Re[f(z)] = (x^3 - 3xy^2 + 3x + 1)$$
$$v(x,y) = Im[f(z)] = (3x^2y - y^3 + 3y)$$

مثال(4):

التابع

$$w = f(z) = \sqrt[3]{z}$$

$$w_k = f(z) = z^{\frac{1}{3}} = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\theta+2\pi k}{3}\right)} \; ; k = 0,1,2$$

$$k = 0 \rightarrow \; w_0 = r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i\theta}{3}}$$

$$k = 1 \rightarrow \; w_1 = r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i(\theta+2\pi)}{3}}$$

$$k = 2 \rightarrow \; w_2 = r^{\frac{1}{3}}e^{\frac{i(\theta+4\pi)}{3}}$$

ومنه: كل قيمة لـ z تقابل ثلاث قيم لـ w وهي:

$$w = f(z) = \sqrt[3]{z} = \{w_0, w_1, w_2\}$$

بالتالي التابع متعدد القيم.

- **بعض التوابع العقدية البسيطة:**

أولاً: التوابع وحيدة القيمة:

1) توابع كثيرات الحدود:

تعرف بالشكل:

$$W = f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$; $a_n \neq 0$: ثوابت عقدية، n عدد صحيح موجب.

2) التوابع الكسرية:

تعرف بالشكل:

$$W = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

حيث $P(z), Q(z)$ كثيرتا حدود.

3) التوابع الأسية:

تعرف بالشكل:

$$W = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + isin\, y)$$
$$u(x,y) = e^x \cos y$$
$$v(x,y) = e^x siny$$

التابع $W = e^z$ في المنطقة D من المستوي العقدي هو تابع دوري ودوره 2π أي أن:

$$e^{z+2\pi i} = e^x[\cos(y + 2\pi) + isin(y + 2\pi)] = e^z$$

4) التوابع المثلثية:

نعرف التابعان المثلثيان $W = cos\, z$ و $W = sin\, z$ بالشكل:

$$cos\, z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$
$$sin\, z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

كما يمكن كتابة التوابع المثلثية بدلالة التوابع الأسية بالشكل:

$$cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

5) التوابع القطعية:

نعرف التابعان $W = ch\, z$ و $W = sh\, z$ بدلالة التابع الأسي:

$$ch\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$
$$sh\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

التابعان $ch\, z$، $sh\, z$ معرفان على جميع نقاط المستوي العقدي.

ثانياً: التوابع متعددة القيم ومنها:

1) التوابع اللوغاريتمية:

يعرف التابع اللوغاريتمي $W = ln\, z$ بأنه التابع العكسي للتابع الأسي،

بفرض $z = x + iy$ و $W = u + iv$ فإننا نجد:

$$e^W = e^u(cos\, v + isin\, v) = z = x + iy$$
$$= |z|(\cos(arg\, z) + isin(arg\, z)) = |z|e^{iarg\, z}$$

ينتج أن:

$$e^u = |z| \;\rightarrow\; u = \ln|z|$$
$$v = arg\, z + 2\pi k \;\; ; \;\; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ومنه نستنتج أن:

$$W = \ln z = u + iv$$
$$= \ln|z| + i(arg\, z + 2\pi k)$$
$$= \ln|z| + iArg\, z \quad ; \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

نلاحظ أن $ln\ z$ يملك عدد لانهائي من القيم.

عندما $k = 0$ فإن التابع اللوغاريتمي:

$$\ln z = \ln|z| + i\ arg\ z$$

تسمى هذه القيمة الاساسية أو الفرع الرئيسي للتابع.

مثال(5): احسب $\ln\sqrt{i}$

نكتب $\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}}$

نحول إلى الشكل القطبي:

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

والشكل الأسي:

$$i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$$

لكن:

$$ln\ i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln i = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}i + 2\pi ki\right) = \frac{\pi}{4}i + \pi ki \quad ; \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$$

2) التابع $\mathbf{W = z^a}$

حيث a عدداً عقدياً $(a, z \in C)$ $W = z^a = e^{aln\ z}$

التابع $W = z^a$ معرف من أجل كل قيمة لـ $z \neq 0$ وهو متعدد القيم.

لكن لدينا: $\ln z = \ln|z| + i(arg\ z + 2\pi k)$ نعوض في العلاقة السابقة:

$$W = z^a = e^{a\left(\ln|z|+i(arg\ z+2\pi k)\right)}$$

حيث: $(k = 0, \pm1, \pm2, \dots)$

مثال(6):

احسب القيمة $(-\mathrm{i})^i$.

الحل:

$$(-\mathrm{i})^i = e^{i\ln(-i)}$$

لكن:

$$-\mathrm{i} = e^{-\frac{\pi}{2}i+2\pi ki}$$

ومنه:

$$(-\mathrm{i})^i = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}i+2\pi ki\right)} = e^{\frac{\pi}{2}-2\pi k}$$

- **النهايات**

ليكن التابع $f(z)$ المعرف من أجل جميع النقاط في جوار النقطة z_o ووحيد القيمة وإذا كان w_o عدداً عقدياً، وإذا أمكن من أجل العدد الحقيقي الموجب المعطى ε تعيين عدد حقيقي موجب δ بحيث يكون

$$|f(z) - w_o| < \varepsilon$$

من أجل جميع النقاط المحققة للمتراجحة:

$$0 < |z - z_o| < \delta$$

حيث $z \neq z_o$ فنقول أن التابع $f(z)$ ينتهي إلى w_o عندما $z \leftarrow z_o$ ونكتب:

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = w_o$$

باختصار :

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta > 0;\ \forall\, 0 < |z - z_o| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - w_o| < \varepsilon$$

مثال(7):

برهن أن

$$\lim_{z \to 1}(2z + 3) = 5$$

$$\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta > 0;$$

$$|f(z) - w_o| = |2z + 3 - 5| = |2z - 2| = 2|z - 1| < \varepsilon$$

ومنه:

$$|z - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

أي أن:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

- **التوابع التحليلية:**

تعريف:

نقول عن التابع $W = f(z)$ أنه تحليلي في النقطة z_0 إذا كان معيناً وقابلاً للاشتقاق في النقطة z_0 وفي كل نقطة في جوار z_0.

يكون التابع $W = f(z)$ تحليلياً في المنطقة D إذا كان تحليلياً في جميع نقاط المنطقة D.

يكون التابع $W = f(z)$ صحيحاً إذا كان التابع تحليلياً في كل نقاط المستوي العقدي C.

مثلاً: كثير الحدود $P(z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \cdots + a_n Z^n \quad (n = 0,1,2, \dots)$

بما أنه قابل للاشتقاق في اي نقطة من المستوي العقدي بالتالي فإنه تابعاً صحيحاً.

تعريف:

إذا كان التابع $W = f(z)$ تحليلياً في بعض نقاط جوار النقطة z_0 ماعدا النقطة z_0 فإن هذه النقطة نسميها نقطة شاذة للتابع $W = f(z)$.

مثال(8): إن التابع $f(z) = \frac{1}{z-3}$ تحليلياً في أية نقطة عدا النقطة $z = 3$ حيث لا يكون عندها التابع مستمراً وهي نقطة شاذة للتابع.

تعريف:

إذا كان التابع $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ قابلاً للاشتقاق في النقطة $z = x + iy$ فإن التابعين الحقيقيين $u(x,y), v(x,y)$ قابلين للاشتقاق الجزئي من المرتبة الأولى في النقطة (x,y) ويحققان شرطي كوشي – ريمان الآتية:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

تعريف:

إذا كان التابعان $u(x,y), v(x,y)$ يملكان في النقطة (x,y) مشتقات جزئية مستمرة تحقق شرطي كوشي – ريمان فإن التابع العقدي:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

قابلاً للاشتقاق في النقطة $z = x + iy$، عندئذ مشتقه $\grave{f}(z)$ يكتب بأحد الأشكال التالية:

$$\grave{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

الشكل القطبي لمعادلة كوشي- ريمان

إذا عرف التابع التحليلي $f(z)$ بدلالة الإحداثيين القطبيين (r,θ) حيث أن:

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = re^{i\theta}$$

فإن معادلتي كوشي-ريمان بالإحداثيات القطبية هي:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

ومشتق التابع هو:

$$\grave{f}(z) = \frac{\bar{z}}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = (\cos\theta - i\sin\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)$$

مثال(9): عين النقاط التي من أجلها يكون التابع $f(z) = \bar{z}^2$ قابلاً للاشتقاق.

الحل:

$$f(z) = \overline{(x+\imath y)^2} = \overline{(x^2 - y^2 + 2xy\imath)} = (x^2 - y^2) - 2xyi$$

حيث: $u(x,y) = x^2 - y^2 \ , \ v(x,y) = -2xy$

بالاشتقاق نحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

بالتالي شرطي كوشي-ريمان يتحققان فقط عندما $x = 0 , y = 0$ أي أن التابع $f(z)$ قابل للاشتقاق فقط في النقطة $z = 0$.

مثال(10): هل التابع $f(z) = z^3$ تحليلي

الحل:

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 \ , \ v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

ومنه:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

بالتالي التابع $f(z)$ تحليلي.

ومشتقه يعطى بالعلاقة:

$$\grave{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 6xyi = 3(x^2 - y^2 + 2xyi) = 3z^2$$

مثال(11): برهن أن التابع $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ صحيح (تحليلي في كل نقاط المستوي العقدي).

الحل:

$$u = e^x \cos y \quad , \quad v = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y$$

نلاحظ أن شرطي كوشي-ريمان محققان من أجل كل قيمة لـ z كذلك فإن المشتقات الجزئية مستمرة في كل نقطة (x, y) فالتابع صحيح ومشتقه:

$$\grave{f}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

مثال(12):

ليكن لدينا التابع $W = \bar{z} = x - iy$

الحل:

$$u = x \quad , \quad v = -y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

بالتالي فإن التابع غير تحليلي في أية نقطة من المستوي العقدي.

مثال(13):

أثبت أن التابع $f(z) = z^6$ تحليلي:

الحل:

$$f(z) = z^6 = r^6 e^{i6\theta} = r^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta)$$

$$u = r^6 \cos 6\theta \quad , \quad v = r^6 \sin 6\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 6r^5 \cos 6\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 6r^5 \cos 6\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -6r^6 \sin 6\theta$$

$$-r\frac{\partial v}{\partial r} = -6r^6 \sin 6\theta$$

ومنه:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

بالتالي التابع تحليلي.

==========

مسألة:

برهن أن التابع f المعرف بالعلاقة $f(z) = z^2$ تحليلي في المستوي C، وعين النقاط التي يكون عندها التابع g المعرف بالعلاقة: $g(z) = x^2 - iy^2$ قابلاً للاشتقاق، وعين النقاط –إن وجدت- والتي يكون عندها التابع h المعرف بالعلاقة: $h(z) = \cos y - i \sin y$ قابلاً للاشتقاق.